(για τυχαίο δακτύλιο) 19/10/17

Ορισμός: I είναι ιδεώδες αν:

i) $I \neq \emptyset$

ii) $\alpha, \beta \in I \Rightarrow \alpha - \beta \in I$

iii) $r \in R, \alpha \in I \Rightarrow r\alpha \in I$

} Δομές Ι

Πρόταση: Αν R μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, τότε: το I είναι ιδεώδες αν-ν:

i) $0 \in I$

ii) Αν $\alpha, \beta \in I$ τότε $\alpha + \beta \in I$

iii) Αν $r \in R$ και $\alpha \in I$ τότε $r\alpha \in I$

αποδ/

$(\Rightarrow)$ $I \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ τουλ 1 στοιχείο $\alpha \in I$

$\alpha \in I, \alpha \in I \overset{ii}{\Rightarrow} \alpha - \alpha = 0 \in I$

$\alpha, \beta \in I$

$1 \in R \Rightarrow -1 \in R \overset{iii}{\Rightarrow} -1 \in R, \beta \in I \Rightarrow -\beta \in I$

$\alpha \in I, -\beta \in I \overset{ii}{\Rightarrow} \alpha - (-\beta) \in I \Rightarrow \alpha + \beta \in I$

$(\Leftarrow)$ $0 \in I \Rightarrow I \neq \emptyset$

$\alpha, \beta \in I$, $1 \in R \Rightarrow -1 \in R$ $\left.\begin{matrix} -1 \in R \\ \beta \in R \end{matrix}\right\} \Rightarrow -\beta \in I$

$\alpha \in I, -\beta \in I \overset{ii\,(\alpha\theta\rho)}{\Rightarrow} \alpha - \beta \in I$

Ιδιότητες των ιδεωδών:

Έστω $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_t \rangle$ και $J = \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$

$\rightarrow I = \{ r_1 f_1 + r_2 f_2 + \dots r_t f_t \mid r_1, r_2, \dots, r_t \in R \}$

$\rightarrow J = \{ q_1 g_1 + q_2 g_2 + \dots q_s g_s \mid q_1, q_2, \dots, q_s \in R \}$

Πρόταση: $I \subset J$ αν-ν $f_1 \in J, f_2 \in J, \dots, f_t \in J$

(αν οι γεννήτορες του I είναι μέσα στο J)

αποδ/

(⇒) $I \subseteq J$

για $r_1 = r_2 = \dots = r_t = 1$ (οι γεννήτορες είναι στοιχεία του ιδεώδους)

ο δακτύλιος που ξέρω ότι έχει μοναδιαίο στοιχείο

$f_1 = 1 f_1 + 0 \cdot f_2 + \dots + 0 f_t$ άρα $f_1 \in I \subseteq J \Rightarrow f_1 \in J$

$\vdots$

$f_t = 0 f_1 + 0 f_2 + \dots + 1 f_t$ άρα $f_t \in I \subseteq J \Rightarrow f_t \in J$

(⇐) $f_1 \in J, \dots, f_t \in J$

Έστω $f \in I$

$f = r_1 f_1 + r_2 f_2 + \dots + r_t f_t$

$\left.\begin{matrix} r_i \in R \\ f_i \in J \end{matrix}\right\}$ $r_i f_i \in J$ ιδεώδες κ.ο.κ

και όταν αθροίζω στοιχεία του ιδεώδους, το άθροισμα ανήκει στο ιδεώδες

Πόρισμα:

Έστω $I = \langle f_1, \dots, f_t \rangle$ και $J = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$

Ισχύει $I = J$ αν-ν $f_1 \in J, f_2 \in J, \dots, f_t \in J$

και $g_1 \in I, g_2 \in I, \dots, g_s \in I$

(οι γεννήτορες του I ανήκουν στο J και οι γεννήτορες του J ανήκουν στο I)

αποδ

$I = J \Rightarrow \begin{cases} I \subseteq J \\ J \subseteq I \end{cases}$ ... (με χρήση της παραπάνω πρότασης

Παράδειγμα: Δείξτε ότι στον πολυωνυμικό δακτύλιο $K[X,Y]$ τα ιδεώδη $I = \langle x+xy, y+xy, x^2, y^2 \rangle$ και $J = \langle x, y \rangle$ είναι ίσα

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \quad x+xy = 1\cdot x + x\cdot y \in \langle x,y \rangle \\ y+xy = 0\cdot x + (x+1)y \in \langle x,y \rangle \\ x^2 = x\cdot x + 0\cdot y \in \langle x,y \rangle \\ y^2 = 0\cdot x + y\cdot y \in \langle x,y \rangle \end{array}\right\} I \subset J$$

$$x = 1(x+xy) - x(y+xy) + y x^2 + 0\cdot y^2 \in I = \langle \ldots \rangle$$
$$y = -y(x+xy) + 1(y+xy) + 0\cdot x^2 + xy^2 \in I = \langle \ldots \rangle$$

! $\frac{1}{x} \notin K[x,y]$

- $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_t \rangle$ και $J = \langle g_1, g_2, \ldots, g_s \rangle \Rightarrow I + J = \langle f_1, f_2, \ldots, f_t, g_1, g_2, \ldots, g_s \rangle$

- $I \cdot J = \langle f_1 \cdot g_1, f_1 \cdot g_2, \ldots, f_1 \cdot g_s, f_2 \cdot g_1, \ldots, f_2 g_s, \ldots, f_t g_1, \ldots, f_t g_s \rangle$

άσκηση: Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ Νδο αν $P_1 = \langle 2, 1+\sqrt{-5} \rangle$, $P_2 = \langle 3, 1+\sqrt{-5} \rangle$, $P_3 = \langle 3, 1-\sqrt{-5} \rangle$ τότε $P_1 \cdot P_1 = \langle 2 \rangle$ και $P_2 P_3 = \langle 3 \rangle$

Λύση:

$P_1 P_1 = \langle 2, 1+\sqrt{-5} \rangle \langle 2, 1+\sqrt{-5} \rangle = \langle 2\cdot 2, 2(1+\sqrt{-5}), (1+\sqrt{-5})2, (1+\sqrt{-5})(1+\sqrt{-5}) \rangle = \langle 4, 2(1+\sqrt{-5}), 1+(-5)+2\sqrt{-5} \rangle = \langle 4, 2(1+\sqrt{-5}), -4+2\sqrt{-5} \rangle \subseteq \langle 2 \rangle$

$4 = 2\cdot 2 \in \langle 2 \rangle$
$2(1+\sqrt{-5}) = (1+\sqrt{-5})\cdot 2 \in \langle 2 \rangle$
$-4+2\sqrt{-5} = (-2+\sqrt{-5})\cdot 2 \in \langle 2 \rangle$
$2 = -4+6 = -1\cdot 4 + 2(1+\sqrt{-5}) - (-4+2\sqrt{-5}) \in \langle 4, 2(1+\sqrt{-5}), -4+2\sqrt{-5} \rangle$

Σπίτι $P_2 \cdot P_3$

$$\begin{cases} P_1P_2 = \langle 1+\sqrt{-5}\rangle \\ P_1P_3 = \langle 1-\sqrt{-5}\rangle \end{cases} \text{ Σπιτι}$$

→ Υπαρχουν ιδεωδη που θελουν απειρους γεννητορες

→ Τα ιδεωδη πολυωνυμων χρειαζονται πεπερασμενο το πληθος γεννητορων για να δημιουργηθουν

Ορισμος: Ενας δακτυλιος R λεγεται δακτυλιος της Noether αν καθε ιδεωδες I του R ειναι πεπερασμενα παραγομενο, δηλ. $\exists\ f_1, f_2, \dots, f_t \in R$ τω $I = \langle f_1, \dots, f_t\rangle$

Οποιοδηποτε σωμα εχει 2 ιδεωδη: το εαυτος και $\langle 0\rangle$

Παραδειγματα δακτυλιων Noether

K σωμα $\Rightarrow$ Αν I ιδεωδες του K τοτε $I = K = \langle 1\rangle$ ή $I = \langle 0\rangle = \{0\}$

Αρα, καθε σωμα ειναι δακτυλιος της Noether

$\mathbb{Z}$: $I = \langle d\rangle$ $\quad$ $\mathbb{Z}$: δακτυλιος της Noether

R πεπερασμενος δακτυλιος: → δακτυλιος της Noether

Το σωμα εχει μονο 2 ιδεωδη $\begin{cases} \text{τον εαυτο του} \\ \text{το } \langle 0\rangle \end{cases}$

Ολα τα ιδεωδη μεσα στο $\mathbb{Z}$ ειναι κυρια ∇

πολυώνυμα με στοιχεία δακτυλίου

Θεώρημα Βάσης του Hilbert
Αν R δακτύλιος της Noether τότε $R[x]$ είναι δακτύλιος της Noether

K σώμα $\Rightarrow K$ δακτύλιος της Noether $\xrightarrow{\text{Hilbert}} K[x_1]$ δακτύλιος της Noether $\xrightarrow{\text{Hilbert}} (K[x_1])[x_2] = K[x_1, x_2]$ είναι δακτύλιος της Noether $\Rightarrow \dots \xrightarrow{\text{Hilbert}} K[x_1, \dots, x_n]$ είναι δακτύλιος της Noether

Παραδείγματα δακτυλίων που δεν είναι δακτύλιοι της Noether

$K[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$

ασκηση (παλιό θέμα)

$\mathbb{R}[x,y]$ $\quad I = \langle x^n - ny^n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ Βρείτε ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων για το I

Βάση για το I

Λύση:

$I = \langle x-y, x^2-2y^2, x^3-3y^3, x^4-4y^4, \dots, \dots, x^{2017}-2017y^{2017}, \dots$

$x^2 - 2y^2 \in I$

$x^2 - y^2 - y^2 \in I$

$\underbrace{(x+y)\underbrace{(x-y)}_{\in I}}_{\in I} - y^2 \in I \Rightarrow \boxed{y^2 \in I}$

Έχω $x^2 - 2y^2$

$y^2 \in I$ $\quad$ άρα $\boxed{x^2 \in I}$

$2y^2 \in I$

Ισχυρισμός

$J = \langle x-y, x^2, y^2 \rangle$ $\quad$ Θ.δ.ο. $I = J$

$x-y = 1(x-y) \in I$

$y^2 = (x-y)(x+y) - (x^2-2y^2) \in I$

$x^2 = x^2 - 2y^2 + 2y^2 = (x^2-2y^2) + 2[(x-y)(x+y) -$
$-(x^2-2y^2)]$

$x^2 = 2(x+y)(x-y) - (x^2-2y^2) \in I$

$J \subset I$ οδο $I \subset J$ παιρνοντας τυχαιο γεννητορα

$x-y = 1(x-y) \in J$
$x^2-2y^2 = 1x^2-2y^2 \in J$
$\vdots$
$x^n - ny^n = x^{n-2}\cdot x^2 - n\cdot y^{n-2}y^2 \in J$

Αρα: $I = J$

$J = \langle x-y, x^2 - 2y^2 \rangle = \overbrace{\langle x-y, y^2 \rangle = \langle x-y, x^2 \rangle}^{\text{αλλες βασεις}}$
$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2y^2$

Παραδειγμα:
Βρειτε μια πεπερασμενη βαση για το ιδεωδες
$I = \langle x^n y^n z^n - 3 \,/\, n \in \mathbb{N} \}$ του $\mathbb{R}[x,y,z]$
Λυση:

$I = \langle xyz-3, x^2y^2z^2-3, \dots, x^{2017}y^{2017}z^{2017}-3, \dots \rangle$

$\underbrace{x^2y^2z^2-3}_{\in I} - xyz\underbrace{(xyz-3)}_{\in I} = -3+3xyz = 3(xyz-1)$

$\underbrace{\frac{1}{3}}_{\in \mathbb{R}[x,y,z]} 3(xyz-1) = xyz-1 \in I$

$\left.\begin{array}{l} xyz-3 \in I \\ xyz-1 \in I \end{array}\right\} \Rightarrow$ η διαφορά τους $\in I \Rightarrow -2 \in I$

$1 = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2) \in I \Rightarrow I = \langle 1 \rangle = R[x,y,z]$

$-\frac{1}{2}$: στοιχείο δακτυλίου

-2: στοιχείο ιδεώδους

Αποδ. $1 \in I$

(ασκ. από το site του)

<u>Διαίρεση πολυωνύμων μιας μεταβλητής</u>

$Q[x]$: σώμα

$f(x) = 3x^7 - 5x^6 + x^3 - 2x + 7$

$g(x) = x^2 - x + 2$

$f(x) = \pi(x)\, g(x) + \upsilon(x)$, $\deg(\upsilon(x)) < 2 = \deg(g(x))$ ή $\upsilon(x) = 0$

$$\begin{array}{rl|l}
 & 3x^7 - 5x^6 + x^3 - 2x + 7 & x^2 - x + 2 \\ \hline
- & 3x^7 - 3x^6 + 6x^5 & 3x^5 - 2x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 13x + 21 \\ \hline
 & -2x^6 - 6x^5 + x^3 - 2x + 7 & \text{πηλίκο} \\
- & -2x^6 + 2x^5 - 4x^4 & \\ \hline
 & -8x^5 + 4x^4 + x^3 - 2x + 7 & \\
- & -8x^5 + 8x^4 - 16x^3 & \\ \hline
 & -4x^4 + 17x^3 - 2x + 7 & \\
- & -4x^4 + 4x^3 - 8x^2 & \\ \hline
 & 13x^3 + 8x^2 - 2x + 7 & \\
- & 13x^3 - 13x^2 + 26x & \\ \hline
 & 21x^2 - 28x + 7 & \\
- & 21x^2 - 21x + 42 & \\ \hline
 & -7x - 35 & \\
 & \text{υπόλοιπο} &
\end{array}$$